第九页第7题：设A,B 皆为非空有界数集,定义数集

$$A + B = \{z \mid z = x + y, x \in A, y \in B\}.$$

证明:(1)$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$; (2) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

证明:

(1)首先，因为A,B 皆为非空有界数集, 所以$\sup A$ 和 $\sup B$ 都存在。

其次, 对于 $\forall z \in A + B$, 根据集合$A + B$ 的定义,都存在某个 $x \in A$ 和某个 $y \in B$, 使得$z = x + y$。因此对$\forall z \in A + B$, 我们有

$$z = x + y \le \sup A + \sup B.$$

这说明$\sup A + \sup B$ 是集合$A + B$ 的一个上界,所以集合$A + B$有上确界,而且根据上确界的定义,

$$\sup(A + B) \le \sup A + \sup B.$$

最后,我们只要证

$$\sup(A + B) \ge \sup A + \sup B.$$

用反证法，我们假设$\sup(A + B) < \sup A + \sup B$。那么根据实数的稠密性, 我们总可以找到实数$\alpha$, 使得

$$\sup(A + B) < \alpha < \sup A + \sup B.$$

我们总可以找到α_1 **和**α_2, **使得**$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, **而且**$\alpha_1 < \sup A$ **和**$\alpha_2 < \sup B$.

这样, 根据上确界的定义, 我们就可以找到某个$x_0 \in A$, 某个$y_0 \in B$, 使得 $\alpha_1 < x_0 < \sup A$, $\alpha_2 < y_0 < \sup B$。注意到$x_0 + y_0$是数集$A + B$里的数, 可是同时却有

$$x_0 + y_0 > \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha > \sup(A + B).$$

这结论的荒谬性说明我们的假设$\sup(A + B) < \sup A + \sup B$是错误的。于是，我们得到$\sup(A + B) \ge \sup A + \sup B$.

(2)类同。留给同学们。